הפקולטה למתמטיקה
בטכניון

חדו"א 1מ2 — 104042

מבחן סוף סמסטר מועד ב', חורף - 12.03.25

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר או באמצעי עזר מכל סוג שהוא, כולל מחשבון.
יש להשתמש בעט שחור או כחול. אין להשתמש בעפרון או בעט אדום.
יש לענות באופן מלא בגוף השאלון במקום המיועד לכך.
אין לפרק את השאלון ויש להחזירו בשלמותו בתום הבחינה.

בהצלחה!

חלק א'

בחלק זה יש 5 שאלות בחירה מרובה. עליכם לסמן את התשובה הנכונה היחידה בצורה ברורה.
משקל כל שאלה בחלק זה הוא 8 נקודות.

1. נתונה $f(x)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) & x>0\\ e^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$. אזי

(א) הפונקציה רציפה בכל נקודה

(ב) $\int_0^1 f(x)dx > \frac{\pi}{4}$

(ג) $f'_+(0)$ קיים

(ד) קיים $b>0$ עבורו $f(x)$ פונקציה יורדת ממש בקטע $(-b,b)$

2. נתונים האינטגרלים המוכללים

$$I=\int_1^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}+\cos\left(x^2\right)}dx$$

$$II=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2+\sin x}dx$$

(א) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ב) שני האינטגרלים המוכללים מתכנסים

(ג) I מתכנס ו-II אינו מתכנס

(ד) שני האינטגרלים המוכללים אינם מתכנסים

3. נתונים הטורים

$$I=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{3+(-1)^n}}$$

$$II=\sum_{n=1}^\infty \frac{n!\cdot 3^{n+1}+n^2}{(3n+8)^n+4n}$$

(א) I מתכנס ו-II אינו מתכנס

(ב) שני הטורים מתכנסים

(ג) I אינו מתכנס ו-II מתכנס

(ד) שני הטורים אינם מתכנסים

4. נתונה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה וגם הפיכה, אז $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל נקודה

(ב) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית אז f גזירה בכל נקודה

(ג) אם לכל $x_0\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ אז $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה

(ד) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חסומה אז $(x-1)^2\cdot x^2\cdot f(x)$ גזירה ב- $x=1$

5. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות. סמנו את הטענה הנכונה.

(א) אם a_n סדרה חיובית עולה אז $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ קיים

(ב) אם a_n, b_n שונות מאפס לכל אינדקס n וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(a_n)}{b_n} = 1$

(ג) אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית עבורה $\sqrt[n]{a_n} < 1$ לכל אינדקס n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ד) אם $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ קיימים וחיוביים, אז a_n, b_n סדרות מתכנסות

חלק ב'

יש לרשום בעמודים הבאים פתרון מלא ומנומק לכל השאלות הבאות.

6. (30 נקודות) בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות)

חשבו את האינטגרל הלא מסוים

$$\int \frac{3x-2}{x^2-6x+8}dx$$

$$\int \frac{3x-2}{x^2-6x+8}dx = \int \frac{3x-2}{(x-2)(x-4)}$$

נעשה פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{3x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$

10

$$A(x-4)+B(x-2) = 3x-2$$

I $Ax+Bx = 3x \rightarrow B = 3-A$

II $-4A-2B = -2 \rightarrow -4A-2(3-A) = -2 \rightarrow -4A-6+2A = -2 \quad /+6$

$-2A = 4 \rightarrow A = -2 \qquad B = 3--2 = 5$

$$= \int \frac{-2}{x-2} + \int \frac{5}{x-4} = -2\ln(|x-2|) + 5\ln(|x-4|) + C$$

(ב) (10 נקודות)

מיצאו מספר רציונלי שהמרחק שלו מ- $\sqrt{11}$ הוא לכל היותר $\frac{1}{400}$.

נבנה פולינום טיילור ליד $a=9$ עם $f(x)=\sqrt{x}$

כך ש $9<c<11$

$$f(a)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$$

$$f'(a)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{6}$$

$$f''(a)=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{4\cdot 3^3}$$

$$f'''(a)=\frac{3}{8}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8x^{\frac{5}{2}}}=\frac{3}{8\cdot 3^5}$$

לפי פולינום טיילור $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$

נחשב את השארית $(R_n(x))$ לפי לאגרנז' ונוודא שגיאת קטנה מ $\frac{1}{400}$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)\cdot(x-a)^{n+1}}{n+1!}$$

נבקש את $R_2(x)$ ונסבר לגבי שארית קטנה מספיק

$$R_2(x)=\frac{f^3(c)\cdot(2)^3}{3!}$$

מאחר ש $9<c<11$ ו $f^3(c)=\frac{3}{8c^{\frac{5}{2}}}$

$$f^3(c)<\frac{3}{8\cdot 3^5}$$

ולכן

$$R_2(x)<\frac{2^3}{3!}\cdot\frac{3}{8\cdot 3^5}=\frac{2^{\cancel{3}\,2}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^2\cdot 2\cdot 3^5=\frac{1}{2\cdot 3^5}$$

$$R_2(x)<\frac{1}{2\cdot 3^5}<\frac{1}{400}$$

11

לפי הנוסחה ונכון מספיק לנו לבדוק את $T_2(x)$

$$T_2(1) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot 2 + \frac{f''(a)}{2!}\cdot 2^2$$

$$T_2(1) = 3 + \frac{1}{6\cdot 1!}\cdot 2 - \frac{1}{4\cdot 27}\cdot\frac{2^2}{2!}$$

$$T_2(1) = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{54}$$

10

(ג) (10 נקודות) חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים במובן הרחב, או הסבירו מדוע אינו קיים במובן הרחב.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$$

8/10

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan(x)\right)^x = \cancel{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^x\cdot\arctan(x)^x}$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arctan(x)\right) = \frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}\arctan(x)}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{\pi}{2}}{-\frac{1}{x^2}} \overset{L}{=}$$

$\frac{2}{\pi}$

$\frac{2}{\pi}$

לא טוב רק את הגבול

$\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) \to$ לא קיים

$\frac{1}{x} \to$ לא קיים

לא נכון

לא נכון

מינוס

לא נכון

שגוי לגמרי

$$\frac{x^2}{\frac{\pi}{2}\arctan(x)(x^2+1)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \to$ לא קיים

לא קיים

$$\lim (x)\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$e^{\lim(x)\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan(x)\right)} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

אכן

7. (30 נקודות)

בשאלה זו אין בהכרח קשר בין הסעיפים.

(א) (10 נקודות) מיצאו את תחום ההתכנסות (קטע ההתכנסות) של טור החזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot x^n$$

$$R = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n-\sin\frac{1}{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1}}{\sqrt[n]{n-\sin\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n-\sin\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(1-\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{1-\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n}} = 1$$

לא מגיע בגלל שזה לא כסדרים

נבדוק את הכנסות באופן 1 ובאופן -1

טור $x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sin\frac{1}{n}} \cdot 1^n$$

יש גבול שהוא חיובי בשביל מבחן ההשוואה

מבחן התכנסות עם $\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n-\sin\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-\sin\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

לכן מתכנסים ומתבדרים יחד

$\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן 1 לא בתוך תחום ההתכנסות

נבדוק ב $x=-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot (-1)^n$$

נבדוק תנאי לייבניץ

$\sin(x) \le 1$ ולכן תמיד חיובי $\Leftarrow \frac{1}{n-\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$

ולכן פונקציה חיובית יורדת $\Leftarrow \frac{1}{n-\sin\frac{1}{n}}$

ולכן מתכנס בתנאי לפי לייבניץ

תחום התכנסות $[-1, 1)$

(ב) (10 נקודות) הוכיחו כי אם $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ גזירות ומקיימות כי $f(a) = g(a)$ וגם $f'(x) \neq g'(x)$ לכל $a < x \leq b$, אז $f(x) \neq g(x)$ לכל $a < x \leq b$.

נגדיר פונקציה עזר $h(x) = g(x) - f(x)$

נשים לב שהפונקציות גזירות ולכן גם הנגזרת $h'(x) = g'(x) - f'(x)$.

נשים לב ש $f'(x) \neq g'(x)$ ולכן הנגזרת אף פעם לא מתאפסת ולכן הפונקציה הזו פונקציה עולה ממש או יורדת ממש למה

אם נגזרת לא רציפה?

לפי משפט רול לפונקציה יכול להיות מקסימום רק בקצוות אם הנגזרת יש מ ולכן לא

70

$h'(x)$ - אין נגזרות

ולכן ל $h(x)$ יש מקסימום פנימי ?

ל $h(x)$ יש פתרון בנקודה a מאחר שנתון $f(a) = g(a)$

ולכן $h(a) = g(a) - f(a) = 0$

אבל אי אפשר שיש לה פתרון נוסף לכל x

ובפרט ב $a < x \leq b$

ולכן אם $h(x) \neq 0$ כאשר $a < x \leq b$

אז $g(x) - f(x) \neq 0$ ולכן $f(x) \neq g(x)$

סגירת אבל למה בין
לא משנה שום
למעשה לא השתמשת בלב

(ג) (10 נקודות) נתונה הפונקציה

$$G(x) = \int_0^{x^3} e^{-t^2}\,dt + \int_x^1 e^{-t^6}\,dt.$$

מיצאו את הנקודות הקריטיות של G ומיינו אותן (כלומר, לכל נקודה קריטית, האם היא נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי או שאינה נקודת קיצון מקומי).

e^{-t^6} ו e^{-t^2} רציפות ולכן אפשר לגזור לפי המשפט היסודי של החדו"א

$$G'(x) = e^{-(x^3)^2} \cdot 3x^2 - 0 + 0 - e^{-x^6}$$

10

$$G'(x) = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^6}$$

$$G'(x) = e^{-x^6} \cdot 3x^2 - e^{-x^6} \,/\, e^{-x^6}$$

בנקודות אלו הנגזרת שווה אפס

$e^{-x^6} \neq 0$ לכן אפשר

לחלק בו

$$0 = 3x^2 - 1 \rightarrow \frac{1}{3} = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

לכן הנקודות הקריטיות שלנו הן $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ו $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

בנקודת עזר נגזרת

-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	
$+$	0	$-$	0	$+$	$G'(x)$
$\nearrow$	$-$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	מיון

יורדת ← $G'(0) = e^0 \cdot 3 \cdot 0 - e^0 = 0 - 1 = -1$

$G'(-1) = e^{-1} \cdot 3 - e^{-1} > 0$ לכן עולה

$G(1) = e^{-1} \cdot 3 - e^{-1} > 0$ לכן עולה

ולכן ב $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ יש נקודת מינימום ו $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ יש נקודת מקסימום